

# 储油罐变位识别与罐容表标定模型

## 摘要

本文在充分了解卧式金属罐容积检定规程的前提下，重点通过几何分析法与积分法建立起储油量与油位高度、变位参数之间关系的数学模型。

在问题一中，通过建立的数学模型求得理论计算值，和无变位进出油实验所得实际观测值的相对误差，对模型进行了修正，并给出了罐体变位后油位高度间隔 1cm 的罐容表标定值。同时，本文将罐体变位后对罐容表的影响的研究，巧妙地转化成对不同的倾斜角  $\alpha$  在一定的油高  $H$  和高度变量  $\Delta H$  下，产生的油量变化量  $\Delta V$  的研究，从而得到罐体倾斜后，油量变化量  $\Delta V$  的曲线形状基本不变，并在油位高度方向进行了平移的结论。

对于问题二，本文在问题一中建立的模型的基础上加入了横向偏转角  $\beta$ ，并在求两端容积时采用了“球冠体内液面与圆柱轴线平行”的近似方法，较为简便地建立了罐内储油量与油位高度及变位参数间一般关系的数学模型。

为了确定变位参数  $\alpha$  和  $\beta$ ，本文结合已建立的数学模型，将问题转化为求解一个关于  $\alpha$  和  $\beta$  的非线性最小二乘问题。利用数值方法，结合附件中的数据，确定了变位参数： $\alpha = 2.1187^\circ$ ， $\beta = 4.6927^\circ$ 。在此基础上，本文给出了实际储油罐变位后的罐容表标定值。

对于模型的评价，本文采用绝对误差和相对误差两个角度，对问题一中建立的模型进行了合理性和正确性分析，修正后的模型对变位油量容积标定的相对误差控制在 2% 以内。对问题二中建立的模型，本文在充分利用实际采集数据下，采用绝对误差分析，检验了模型的正确性。另外，又通过分析总体误差与变位参数的关系，讨论了模型的可靠性。

最后，本文分析了现有模型的缺陷，并提出了进一步改进的方向。

**【关键词】** 几何分析法；数值积分；非线性最小二乘法

## 目录

一、问题重述.....	3
二、基本假设.....	3
三、符号说明.....	3
四、模型建立、分析与求解.....	4
(一) 问题一 .....	4
1、椭圆的部分面积公式 .....	4
2、罐体内油量容积的确定 .....	5
3、模型修正与求解 .....	6
4、纵向倾斜角 $\alpha$ 对罐容表的影响 .....	7
(二) 问题二 .....	9
1、罐内储油量与油位高度及变位参数之间一般关系的确定.....	9
2、油量容积的修正 .....	10
3、变位参数的确定 .....	10
4、模型求解 .....	11
五、模型评价与改进.....	11
(一) 模型评价 .....	11
1、问题一 .....	11
2、问题二 .....	13
(二) 进一步的改进方向 .....	14
六、参考文献.....	14
附录 .....	15

## 一、问题重述

通常加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐，并且一般都有与之配套的“油位计量管理系统”，采用流量计和油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。

许多储油罐在使用一段时间后，由于地基变形等原因发生变位，从而导致罐容表发生改变。按照有关规定，需要定期对罐容表进行重新标定。一种典型的储油罐其主体为圆柱体，两端为球冠体。需用数学建模方法研究解决储油罐的变位识别与罐容表标定的问题。

(1) 为了掌握罐体变位后对罐容表的影响，利用小椭圆型储油罐，分别对罐体无变位和倾斜角为 $\alpha=4.1^\circ$ 的纵向变位两种情况做了实验，需要根据实验数据建立数学模型研究罐体变位后对罐容表的影响，并给出罐体变位后油位高度间隔为1cm的罐容表标定值。

(2) 对于实际储油罐，建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，即罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 $\alpha$ 和横向偏转角度 $\beta$ ）之间的一般关系。利用罐体变位后在进/出油过程中的实际检测数据，根据所建立的数学模型确定变位参数，并给出罐体变位后油位高度间隔为10cm的罐容表标定值。进一步利用实际检测数据来分析检验模型的正确性与方法的可靠性。

## 二、基本假设

- (1) 储油罐的变位不会太大，包括纵向倾斜的角度和横向偏转的角度；
- (2) 储油罐变位后不会改变罐体的几何形状；
- (3) 油体温度和体积的改变不会造成储油罐发生形变；
- (4) 油罐内温度和压强的变化很小，不影响罐体内油量容积；
- (5) 储油罐的厚度和内部附件的体积对罐体内油量容积的影响可以忽略不计。

## 三、符号说明

- $H$  油浮子显示的油位高度；
- $H'$  罐体产生横向偏转后，修正得到的油位高度，即罐体内的实际油位高度；
- $a$  小椭圆型油罐侧面椭圆短半轴长度；
- $b$  小椭圆型油罐侧面椭圆长半轴长度；
- $L$  （椭）圆柱的长度；
- $R$  球冠体的曲率半径；
- $H_1$  罐体纵向倾斜后，柱体容器中的高端液高；
- $H_2$  罐体纵向倾斜后，柱体容器中的低端液高；
- $V^*$  罐体内油量容积的精确值；

## 四、模型建立、分析与求解

### (一) 问题一

为了得到罐体变位后的罐容表，首先要推导出油位高度与罐体内油量容积之间的关系。我们使用几何分析法，将该实际问题抽象为如下的数学模型：

现有一个椭圆柱体，侧面椭圆的短半轴为  $a$ ，长半轴为  $b$ ，长度为  $L$ 。柱体的中心线与水平面成  $\alpha$  角。平面  $P$  与水平面平行，并与椭圆柱体相交，椭圆柱体中在平面  $P$  以下的体积  $V$ 。

此类问题可用积分法来求解。由于椭圆柱体纵向倾斜角度  $\alpha$  后，与平面  $P$  的交线为不规则封闭曲线，其方程不易求得。因此，若沿油底到油面的方向（ $Y$  轴方向）积分，难度很大。于是我们选择椭圆柱体中心线的方向（ $X$  轴方向）作为积分方向。如图 1 所示：

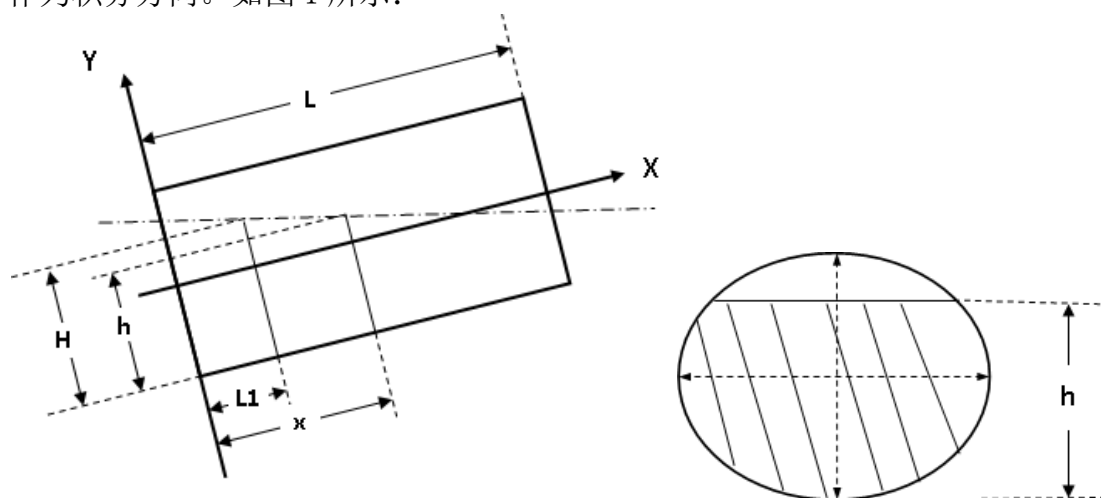


图 1 储油罐截面图，阴影为有油部分

### 1、椭圆的部分面积公式

$S_d$ （希望得到的面积）：椭圆  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  在直线  $y = h$  ( $-a \leq h \leq a$ ) 下方的面积；

$S_u$ ：椭圆  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$  在直线  $y = h$  ( $0 \leq h \leq a$ ) 上方的面积；

直线  $y = h$  ( $-a \leq h \leq a$ ) 与椭圆的两个交点为  $\left[-b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}, h\right]$  和  $\left[b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}, h\right]$ ，

当  $h \in [0, a]$  时， $S_u = 2 \int_0^{b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}} \left(a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}} - h\right) dx$

即  $S_u = ab\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{h}{a}\right)\right) - \frac{hb}{a}\sqrt{a^2 - h^2}$

又由于  $S_u + S_d = \pi ab$ ，从而  $S_d = ab(\frac{\pi}{2} + \arcsin(\frac{h}{a})) + \frac{hb}{a}\sqrt{a^2 - h^2}$ ， $h \in [0, a]$

当  $h \in [-a, 0]$  时，由椭圆关于 Y 轴的对称性有：

$$S_d = ab(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{-h}{a})) - \frac{(-h)b}{a}\sqrt{a^2 - (-h)^2}, \quad h \in [-a, 0]$$

$$\text{从而, } S_d = ab(\frac{\pi}{2} + \arcsin(\frac{h}{a})) + \frac{hb}{a}\sqrt{a^2 - h^2}, \quad h \in [-a, a]$$

## 2、罐体内油量容积的确定

从侧面沿着圆柱体的中轴看，椭圆柱体在平面 P 以下的体积 V，可以看成是由一系列底面为部分椭圆（面积设为 A），高为微元  $\Delta l$ （ $\sum_{\Delta} \Delta l = L$ ）的柱体的体积相加得到。当  $\Delta l$  趋于无穷小时，有：

$$V = \int Adx$$

$$A = ab(\frac{\pi}{2} + \arcsin(\frac{h}{a})) + \frac{bh}{a}\sqrt{a^2 - h^2}$$

$$h = H - a + (L_1 - x) \tan \alpha$$

这样我们就建立了储油量 V 和油位高度 H、纵向倾斜角  $\alpha$  间的关系了。

当  $\alpha = 0$ ，即罐体无变位时，体积 V 有简洁的解析值：

$$V = \int_0^L Adx = abL(\frac{\pi}{2} + \arcsin(\frac{H-a}{a})) + \frac{bL(H-a)}{a}\sqrt{-H^2 + 2aH}。$$

当  $\alpha = 4.1^\circ$  时，由于倾斜角的影响，上述对 V 的积分需要根据 H 的取值范围，分 5 种情况讨论，见图 2。

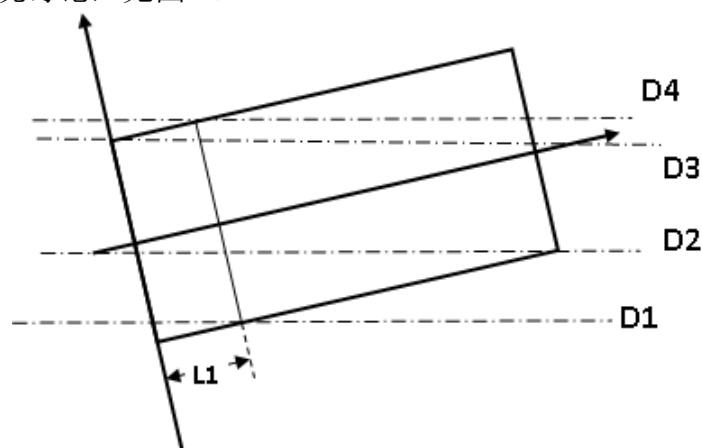


图 2

(1) 当  $H = 0$  时，油量不超过  $V = \int_0^{L_1} Adx$ ；

(2) 当  $0 < H < L_2 \tan \alpha$  时， $V = \int_0^{L_1 + \frac{H}{\tan \alpha}} Adx$ ；

- (3) 当  $L_2 \tan \alpha \leq H \leq 2a - L_1 \tan \alpha$  时,  $V = \int_0^L A dx$ ;
- (4) 当  $2a - L_1 \tan \alpha < H < 2a$  时,  $V = \pi ab(L_1 - \frac{2a-H}{\tan \alpha}) + \int_{L_1 - \frac{2a-H}{\tan \alpha}}^L A dx$ ;
- (5) 当  $H = 2a$  时,  $V \in [\pi abL_1 + \int_{L_1}^L A dx, \pi abL]$

为方便进一步的分析与求解, 我们将上述 5 种情况整理为一个统一的表达式:

$$V = \int_0^L \min(ab\pi, \max(A, 0)) dx$$

我们已用 Matlab 求出了上述积分的解析值, 但由于表达式过于繁琐, 我们在此就不给出了。

另一方面, 由于积分的解析值过于复杂, 不利于模型的求解和罐容表的标定, 我们使用数值积分的方法对上述积分重新求解, 从而得到  $H$  和相应的  $V$  的关系表。

### 3、模型修正与求解

首先我们给出一个相对误差的定义:  $\delta V_{\text{相对}} = \frac{V - V^*}{V^*} \times 100\%$

利用问题 1 附件中对无变位进出油数据的记录, 对上述模型进行检验。我们发现当在  $\alpha = 0^\circ$  时,  $\delta V_{\text{相对}}$  基本稳定在 3.488%。由此我们认为, 这是由于某种特定的因素造成的。

查阅资料后我们得知, 按照国家计量检定规程<sup>1</sup>, 标准储油罐的壁厚不得于 5mm, 且油罐内部的附件体积不可忽略。于是我们再引入一个附加假设: 罐体内部附件与罐壁厚度对罐容的影响随罐体内油量容积均匀分布。

根据小椭圆罐体无变位进出油试验数据的误差分析, 我们给出关于罐体内油量容积的修正  $\tilde{V}$ , 其满足:

$$\frac{V - \tilde{V}}{\tilde{V}} = 3.488\%$$

即有:

$$\tilde{V} = V / 103.488\%$$

于是, 我们得到了修正后的罐体内油量容积与油位高度的关系表, 并给出了罐体变位后油位高度间隔为 1cm 的罐容表如下:

<sup>1</sup> 《JJG\_266-1996\_卧式金属罐容积检定规程》

小椭圆型储油罐纵向倾斜 $\alpha$ 后的罐容表

H (cm)	V(L)	H(cm)	V(L)	H(cm)	V(L)	H(cm)	V(L)	H(cm)	V(L)
0	1.62	13	113.78	26	445.94	39	895.49	52	1406.94
1	3.41	14	132.31	27	477.35	40	933.11	53	1447.85
2	6.05	15	152.50	28	509.38	41	971.08	54	1488.92
3	9.64	16	174.18	29	542.00	42	1009.38	55	1530.13
4	14.26	17	197.12	30	575.18	43	1047.98	56	1571.47
5	19.99	18	221.19	31	608.91	44	1086.88	57	1612.93
6	26.92	19	246.29	32	643.15	45	1126.06	58	1654.50
7	35.09	20	272.36	33	677.88	46	1165.50	59	1696.16
8	44.59	21	299.32	34	713.09	47	1205.20	60	1737.91
9	55.46	22	327.13	35	748.74	48	1245.13	61	1779.72
10	67.76	23	355.73	36	784.83	49	1285.28	62	1821.59
11	81.55	24	385.10	37	821.33	50	1325.64	63	1863.51
12	96.87	25	415.18	38	858.22	51	1366.20	64	1905.47
H (cm)	V(L)	H(cm)	V(L)	H(cm)	V(L)	H(cm)	V(L)	H(cm)	V(L)
65	1947.44	77	2448.61	89	2930.32	101	3368.57	113	3729.73
66	1989.43	78	2489.80	90	2968.87	102	3402.20	114	3754.66
67	2031.42	79	2530.84	91	3007.11	103	3435.29	115	3778.54
68	2073.39	80	2571.72	92	3045.02	104	3467.81	116	3801.27
69	2115.34	81	2612.43	93	3082.59	105	3499.74	117	3822.72
70	2157.25	82	2652.96	94	3119.79	106	3531.04	118	3842.63
71	2199.12	83	2693.28	95	3156.62	107	3561.68	119	3860.87
72	2240.92	84	2733.40	96	3193.05	108	3591.64	120	3877.50
73	2282.65	85	2773.29	97	3229.06	109	3620.88		
74	2324.30	86	2812.94	98	3264.64	110	3649.35		
75	2365.85	87	2852.34	99	3299.77	111	3677.01		
76	2407.29	88	2891.47	100	3334.42	112	3703.82		

#### 4、纵向倾斜角 $\alpha$ 对罐容表的影响

由于上述建立的储油量模型函数 $V=V(H,\alpha)$ 和油位高度 $H$ 、纵向倾斜角 $\alpha$ 相关。因此，固定一个高度 $H$ ，对于不同的倾斜角 $\alpha$ ，就会求出不同的储油量 $V$ 。同理，在固定油位高度 $H$ 和高度变量 $\Delta H$ 时，不同的倾斜角 $\alpha$ 就对应不同的油量变化量 $\Delta V$ 。因此，我们对罐体变位后对罐容表的影响的研究，可以转化成研究不同的纵向倾斜角 $\alpha$ 在一定的油高 $H$ 和高度变量 $\Delta H$ 下，产生的油量变化量 $\Delta V$ 的差异。而事实上，由罐容表的定义， $\Delta V$ 就是罐容表一个最直接的表现特征。由此可见，研究纵向倾斜角 $\alpha$ 对 $\Delta V$ 的影响，本质上就是研究 $\alpha$ 对罐容表的影响。

下面分两个角度来研究这个问题。首先我们讨论纵向倾斜角 $\alpha$ 对罐容表的标定是否有明显的影响，进而再讨论其是如何影响罐容表的标定的。

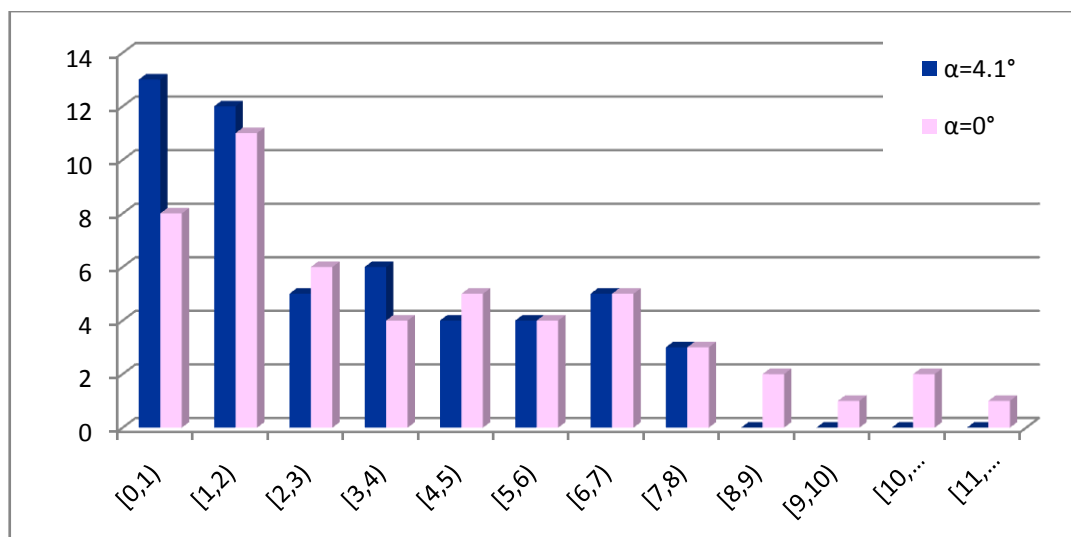


图 3

为了研究罐体变位的纵向倾斜角  $\alpha$  是否对罐容表有明显的影响，我们对椭圆型储油罐变位后每次进出油的油量  $\Delta V$  分两种方法进行计算。第一种方法认为变位纵向倾斜角  $\alpha$  对罐容表有明显影响，所以采用倾斜角为  $4.1^\circ$  的罐体体积计算方法，进出油的油量为不同油位高度下的体积差  $\Delta V$ ；第二种方法认为纵向倾斜角  $\alpha$  对罐容表的影响不明显，从而采用倾斜角为  $0^\circ$  时的罐体体积计算方法求得进出油的油量  $\Delta V$ 。

图 3 为两种方法求得的  $\Delta V$  的误差分布直方图。从图中可以明显的看出第一种方法的误差主要分布在  $[0, 7]$  之间，而第二种方法的误差分布范围较大。说明由第一种方法得到的  $\Delta V$  更加逼近  $\Delta V^*$ 。进而可以说明纵向倾斜角  $\alpha$  对罐容表的影响比较明显。

油罐倾斜角对罐容表的影响

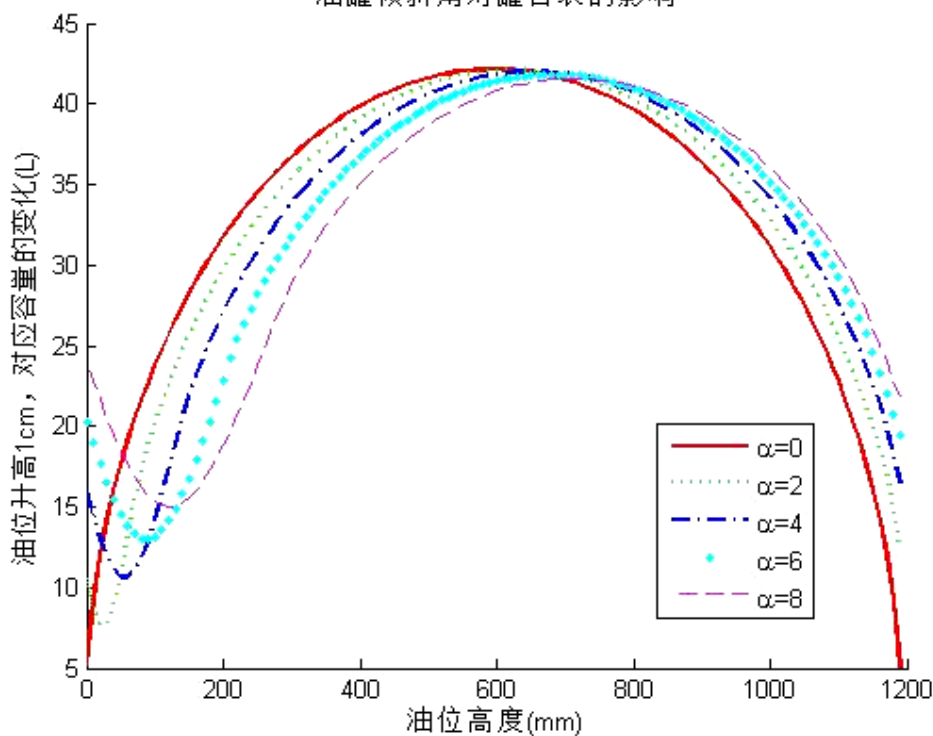


图 4



为了直观地反映出不同倾斜角对罐容表的影响，我们绘制了图 4。

图 4 表示的是在不同倾斜角  $\alpha$  下，油位高度  $H + \Delta H$  所标定的容量与油位高度  $H$  所标定的容量之差  $\Delta V$  的变化情况。当  $H$  在 2cm 到 6.5cm 之间时， $\Delta V$  随着  $\alpha$  的增大而减小， $H$  在 6.5cm 到 12cm 之间时， $\Delta V$  随着  $\alpha$  的增大而增大。

在某个固定的倾斜角  $\alpha$  下，容量的变化量基本符合从小到大再减小的趋势，这与罐体空间形状的变化趋势相吻合。事实上，这也决定了即使罐体倾斜角不同，其总体的容量变化曲线还是大致一样。另一方面，图 4 也反应了倾斜角的变化最终只是令容量的变化曲线在油位高度方向上发生了平移。

## (二) 问题二

### 1、罐内储油量与油位高度及变位参数之间一般关系的确定

问题二的罐体由两部分构成：

第一部分是带横向偏转  $\beta$  角的中间的圆柱体体积  $V_1$ 。如图 5：

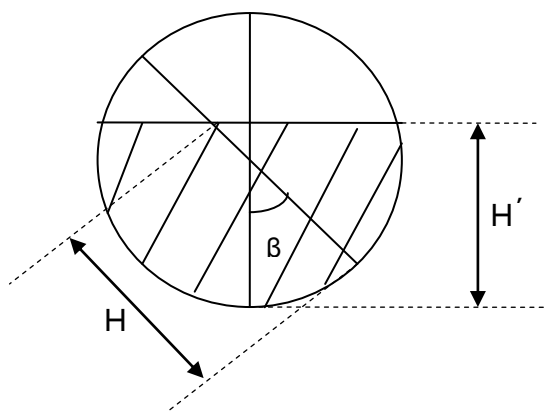


图 5

结合第一问的结论，我们可以轻松地建立  $V_1$  与  $H$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  的关系：

$$V_1 = \int_0^L \min(\max(A, 0), \pi a^2) dx,$$

其中，

$$A = a^2 \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{h}{a}\right) \right) + h \times \sqrt{a^2 - h^2}$$

$$h = H' + (L_1 - x) \times \tan \alpha$$

$$H' = a(1 - \cos \beta) + H \cos \beta$$

第二部分是两端球冠体内的油量容积。若直接计算，表达式过于复杂，不易分析与求解，因此我们采用“球冠体内液面与圆柱轴线平行”的近似方法来计算此部分的油量容积。我们用阴影部分的体积来替代两端球冠体内油量容积，如图 6 所示。

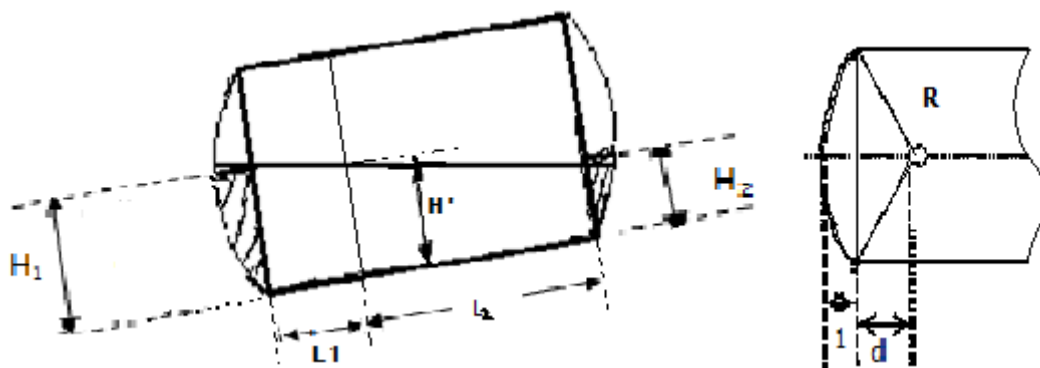


图 6

由几何关系容易得到球冠体的曲率半径  $R=13/8$  ,  $d=R-1$  ,  
对于两边的球冠体内液面高度, 有:

$$H_1 = H' + L_1 \tan \alpha, \quad H_2 = H' - L_2 \tan \alpha$$

用  $V_2$  表示左侧油的体积,  $V_0$  表示左侧球缺顶部分的总容积, 则有

$$V_2 = \begin{cases} \bar{V}(H_1), (H_1 < a) \\ V_0 - \bar{V}(2a - H_1), (H_1 > a) \end{cases}$$

其中,

$$\bar{V}(x) = \int_{a-x}^a ((R^2 - y^2) \times \arccos(\frac{d}{\sqrt{R^2 - y^2}}) - d\sqrt{R^2 - y^2 - d^2}) dy$$

$$V_0 = \frac{\pi}{6} (3a^2 + (R-d)^2)(R-d)$$

同理, 右侧球冠体油体积  $V_3$  的计算类似于  $V_2$ :

$$V_3 = \begin{cases} \bar{V}(H_2), (H_2 < a) \\ V_0 - \bar{V}(2a - H_2), (H_2 > a) \end{cases}$$

这样, 罐体内油量容积  $V = V(H, \alpha, \beta) = V_1 + V_2 + V_3$ 。

## 2、油量容积的修正

在问题一中, 我们考虑了罐壁厚度和附加体积的影响, 对油量的容积做出修正。在问题二中, 我们也首先考虑是否需要已建立的模型做出修正。

由附件 2 给出的实际采集数据, 显示油量容积为对应的高度在罐体无变位时的系统数据。根据已建立的模型和油位高度  $H$ , 我们计算出相对应的油量容积  $V$ 。试验比较所得, 两者的绝对误差约为  $10^{-2}L$ , 因此我们认为, 在问题二中, 罐壁厚度和附加体积的影响可以忽略不计, 油量容积不需要进行修正。

## 3、变位参数的确定

由题目附件 2 给出的数据, 我们发现每次的出油量与出油前后的显示油量容积之差并不相符, 说明了储油罐已倾斜, 但罐容表没有进行相应的重新标定, 所以我们无法只根据表中的油高  $H$  与容积  $V$  而给出  $\alpha$  和  $\beta$ 。为此, 我们利用问

题一中关于倾斜角对罐容表影响的结论，将储油量 $V$ 与油位高度 $H$ 、变位参数 $\alpha$ 、 $\beta$ 的一般关系转化成变位参数 $\alpha$ 、 $\beta$ 与油位高度 $H$ 、高度变化量 $\Delta H$ 和油量变化量 $\Delta V$ 的关系。

为了确定变位参数，我们将问题转化为如下的非线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min f(\alpha, \beta) &= \sum_{i=2}^{603} [\Delta V_i(H_{i-1}, H_i, \alpha, \beta) - \Delta V_i^*(H_{i-1}, H_i)]^2 \\ \text{st.} \\ 0 \leq \alpha &< 90^\circ, 0 \leq \beta < 90^\circ \end{aligned}$$

其中，

$$\Delta V_i(H_{i-1}, H_i, \alpha, \beta) = V(H_{i-1}, \alpha, \beta) - V(H_i, \alpha, \beta);$$

$\Delta V_i^*(H_{i-1}, H_i)$ 为油高从 $H_{i-1}$ 变到 $H_i$ 时，实际进油或出油的容量。

此规划等价于一个非线性最小二乘法。规划的目的是找到恰当的变为参数（倾斜角 $\alpha$ 和偏转角 $\beta$ ），使得相应高度 $H$ 和高度变化量 $\Delta H$ 下，理论计算得到的油量变化量 $\Delta V$ 尽可能贴近实际的油量变化量 $\Delta V^*$ 。

#### 4、模型求解

使用 Matlab 求解这个非线性最小二乘问题，得到 $\alpha$ 和 $\beta$ 的值如下：

$$\begin{cases} \alpha = 2.1187^\circ \\ \beta = 4.6927^\circ \end{cases}$$

在得到变位参数 $\alpha$ 和 $\beta$ 后，我们利用 $V$ 的积分表达式，用数值积分的方法得到不同油位高度 $H$ 下的罐容表，绘制成如下表格：

实际储油罐变位( $\alpha, \beta$ )后的罐容表

H (m)	V(L)	H(m)	V(L)	H(m)	V(L)	H(m)	V(L)	H(m)	V(L)
0	47.09	0.7	9480.42	1.4	27440.74	2.1	46759.06	2.8	61760.61
0.1	356.94	0.8	11748.23	1.5	30243.38	2.2	49314.52	2.9	63085.31
0.2	1067.20	0.9	14146.41	1.6	33057.36	2.3	51768.62	3.0	64019.29
0.3	2222.21	1.0	16655.03	1.7	35867.41	2.4	54102.25		
0.4	3699.69	1.1	19255.70	1.8	38658.23	2.5	56294.43		
0.5	5427.85	1.2	21931.13	1.9	41414.36	2.6	58321.47		
0.6	7365.12	1.3	24664.79	2.0	44120.05	2.7	60155.37		

### 五、模型评价与改进

#### （一）模型评价

##### 1、问题一

对于问题一中建立的模型，我们将从绝对误差和相对误差两个方面来分析。

在小椭圆型油罐无变位进油和出油的实验中，我们采用绝对误差来分析模型的合理性与正确性。其中，绝对误差定义如下： $|V - V^*|$ 。

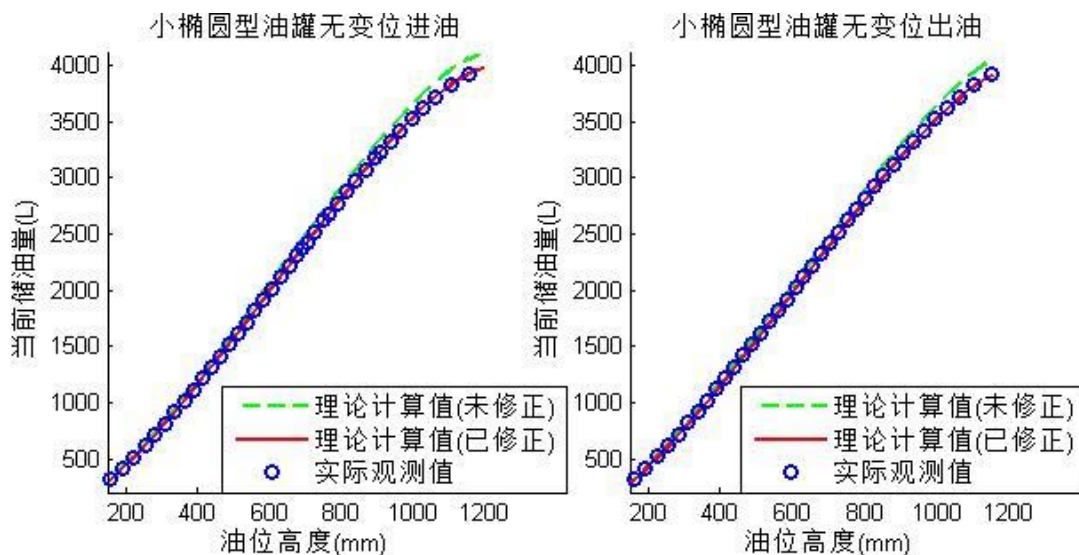


图 7

在图 7 中，绘制了在油罐无变位时，由模型计算得到的在油位高度  $H$  下的储油量和实际观测到的在油位高度  $H$  下的储油量的比较。从图 7 中可以看到，修正后模型算出的储油量与实际观测值基本吻合，而通过计算，修正后的模型的绝对误差约为  $10^{-2}L$ ，从而进一步验证了修正后的模型的正确性。

在小椭圆型油罐倾斜变位进油和出油的实验中，我们采用相对误差来分析模型的合理性与正确性。其中，相对误差定义如下： $\frac{|V - V^*|}{V^*} \times 100\%$ 。

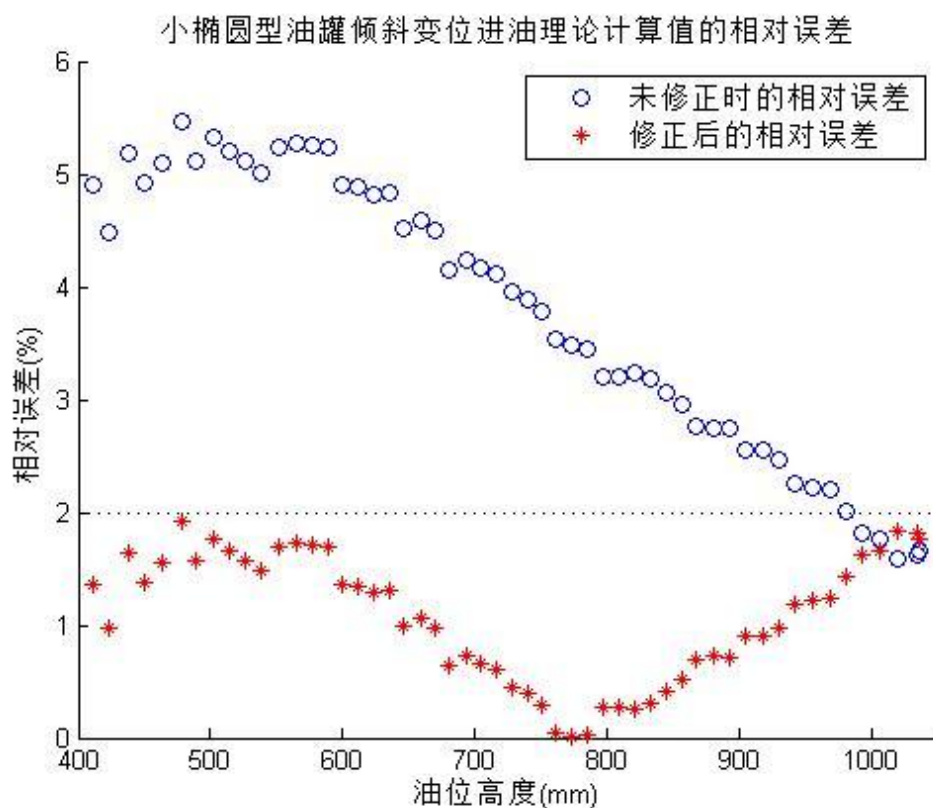


图 8

图 8 绘制了由未修正模型和修正后模型得到的小椭圆型倾斜变位进油后油量容积的相对误差。在未修正之前，理论计算得到的相对误差最大超过了 5%。而修正后的模型的相对误差基本小于未修正模型的相对误差，这也说明了对模型的修正是成功的。另一方面，修正后的模型的相对误差均可控制在 2% 以内，这进一步验证了我们模型的合理性和可靠性。

## 2、问题二

对第二问中所建立的模型的评价分为两个方面，一个方面是模型的正确性分析；另一个方面是方法的可靠性分析。

### (1) 模型的正确性分析

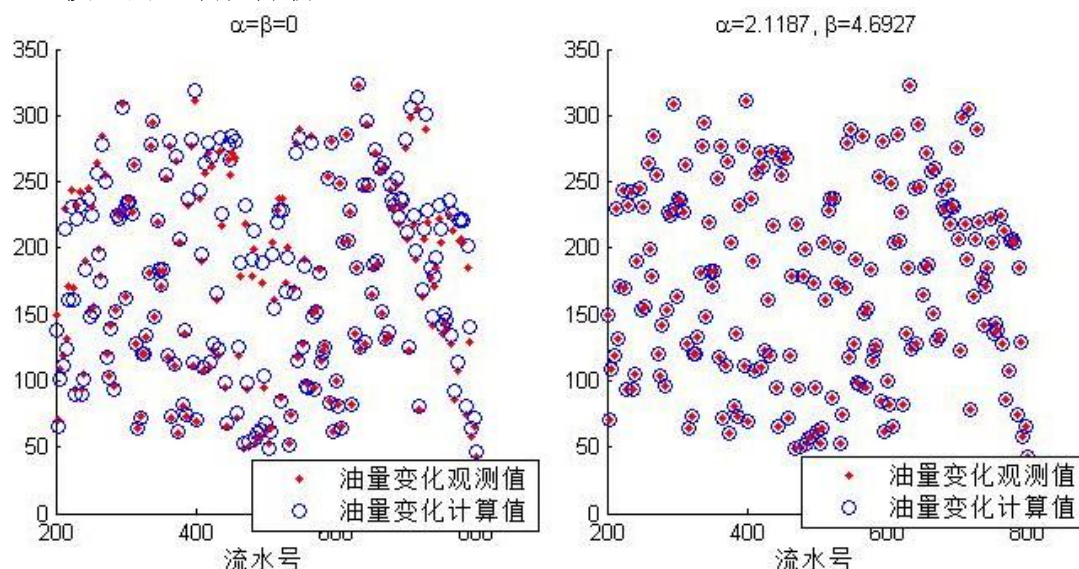


图 9

从图 9 中我们可以很清楚地看到根据确定的变位参数，由模型计算得到的油量变化值与油量变化的实际值相吻合。进一步，通过数值计算，假定油罐没有倾斜和偏转时，模型计算得到的总体误差为 151.7。而在我们通过非线性规划求得的变位参数之下，模型计算得到的油量变化值与油量变化真实值的总体误差（即两者之差的二范数）仅为  $5.0 \times 10^{-11}$ ，即可忽略不计。这再次检验了我们所求出的变位参数  $(\alpha, \beta)$  的正确性。

### (2) 方法的可靠性分析

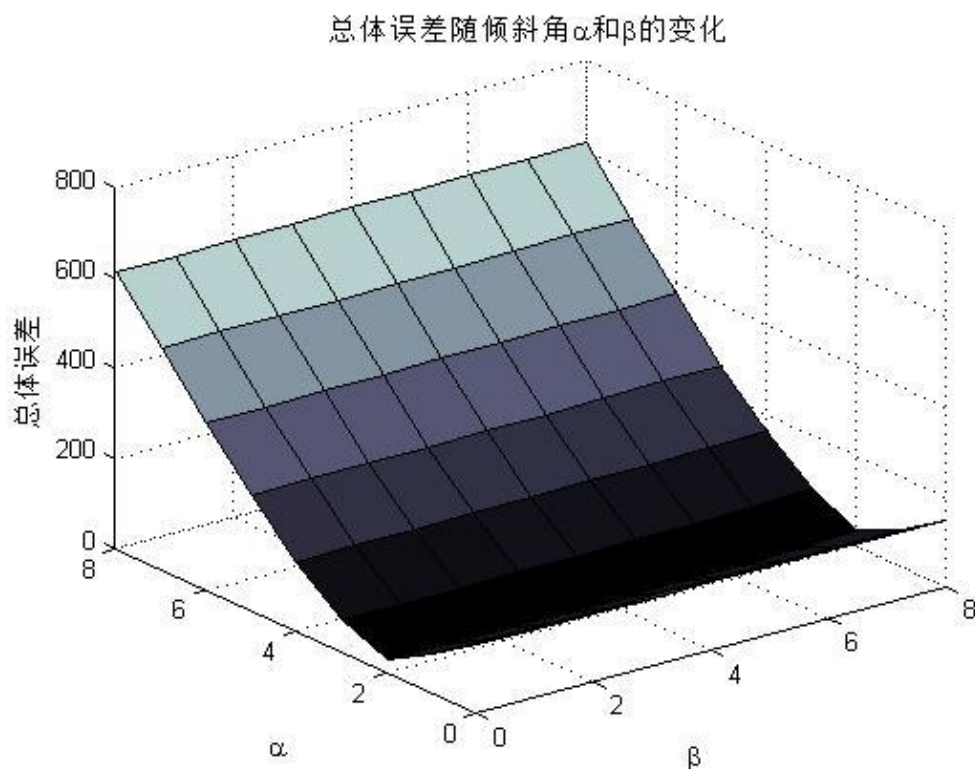


图 10

图 10 绘制了油量变化的计算值与真实值的总体误差（即两者之差的二范数）随变位参数  $\alpha$  和  $\beta$  的变化关系图。当固定  $\alpha$ ，让  $\beta$  变化时，总体误差变化不大，说明参数  $\beta$  对总体误差的贡献不大。而固定  $\beta$ ，让  $\alpha$  变化时，总体误差的变化随之增大，这说明倾斜角  $\alpha$  对罐体油量容积的影响较大。考虑到我们给出的求解参数  $(\alpha, \beta)$  的方法是基于选取最优的  $(\alpha, \beta)$  使得总体误差达到最小，从图中  $\alpha$ 、 $\beta$  和总体误差的关系图中，可以知道  $(\alpha, \beta)$  最优解的求取与算法中给定的初始值无关，而且总体误差关于  $(\alpha, \beta)$  是凸的，因此在使用数值解法求解非线性最小二乘问题的时候，算法能有较好的稳定性。

## （二）进一步的改进方向

我们建立的模型的过程使用了几何分析法，假设罐体是规则的几何形状，是比较理想化的。但实际上，在油罐标定过程中还存在着各种影响因素：比如油压过大时会造成储油罐的轻微形变；油的温度变化也会直接影响储油罐的膨胀程度等。这些因素都是会对罐容表的标定产生一定影响的。因此，我们可以根据这些影响因素进一步对模型进行修正。

## 六、参考文献

- [1] JJG\_266-1996\_卧式金属罐容积检定规程
- [2] 程继元 浅谈影响油罐标定与计量的因素及其修正方法 石油商技 第 22 卷第 2 期 2004
- [3] 杨启帆 何勇 谈之奕 数学建模竞赛 浙江大学出版社 2005
- [4] 付昶林 倾斜油罐容量的计算 黑龙江八一农垦大学 第二期 43-52, 1981

## 附录

以下是在建模过程中用到的主要程序：

1.问题一中修正后的模型求解液体在罐型容器中体积：

```
function Q = calcQ(H, alpha)
```

```
a = 0.6;
```

```
b = 1.78 / 2;
```

```
t = tan(alpha);
```

```
F = @(x) min(max(a .* b .* (pi ./ 2 + asin((H - a + (0.4 - x) .* t) ./ a)) + b .* (H - a + (0.4 - x) .* t) ./ a .* sqrt(a.^2 - (H - a + (0.4 - x) .* t).^2), 0), pi * a * b);
```

```
Q = quad(F, 0, 2.45);
```

```
Q = Q / (100 + 3.488) * 100;
```

```
end
```

2.问题一中修正后的模型求解液体在罐型容器中体积的绝对误差和相对误差：

```
function [Vcalc, Vabs, Vrel] = compareV(H, Vexact, alpha)
```

```
alpha = alpha / 180 * pi;
```

```
n = length(H);
```

```
Vcalc = zeros(n, 1);
```

```
for i = 1 : n
```

```
    Vcalc(i) = calcQ(H(i), alpha);
```

```
end
```

```
Vcalc = Vcalc * 1000;
```

```
Vabs = abs(Vcalc - Vexact);
```

```
Vrel = Vabs ./ Vexact * 100;
```

```
end
```



3.问题二中在给定油位高度，倾斜角和偏转角后，求解储油罐内液体的体积：

```
function Q = calcV(H, alpha, beta)
```

```
alpha = alpha / 180 * pi;
```

```
beta = beta / 180 * pi;
```

```
L1 = 2;
```

```
L2 = 6;
```

```
W = 1.5;
```

```
R = 13 / 8;
```

```
f = 1;
```

```
Q = calcV1(H, alpha, beta, W, L1, L2);
```

```
h1 = W * (1 - cos(beta)) + H * cos(beta) + L1 * tan(alpha);
```

```
Q = Q + calcV2(h1, alpha, W, R, f);
```

```
h2 = W * (1 - cos(beta)) + H * cos(beta) - L2 * tan(alpha);
```

```
Q = Q + calcV2(h2, alpha, W, R, f);
```

```
Q = Q * 1000;
```

```
end
```

```
function Q = calcV1(H, alpha, beta, W, L1, L2)
```

```
H = W * (1 - cos(beta)) + H * cos(beta);
```

```
t = tan(alpha);
```

```
F = @(x) min(max(W^2 * (pi / 2 + asin((H - W + (L1 - x) * t) / W)) + W * (H - W + (L1 - x) * t) /  
W .* sqrt(W^2 - (H - W + (L1 - x) * t).^2), 0), pi * W^2);
```

```
Q = quad(F, 0, L1 + L2);
```

```
function Q = calcV2(H, alpha, W, R, f)
```

```
H = min(max(H, 0), 2 * W);
```

```
d = R - f;
```

```
if (H > W)
```

```
    V = pi / 6 * (3 * W^2 + f^2) * f;
```

```
    Q = V - calcV2(2 * W - H, alpha, W, R, f);
```

```
else
```

```
    F = @(y) (R.^2 - y.^2) .* acos(d ./ sqrt(R.^2 - y.^2)) - d .* sqrt(R.^2 - y.^2 - d.^2);
```



```

    Q = quad(F, W - H, W);
end
end

```

4.问题二中求解倾斜角和偏转角：

```

function res = solve_delta(H, V)
res = lsqcurvefit(@(angle, H) myfun_delta(angle, H),[1;1],H,V,[0;0]);
end

```

```

function F = myfun_delta(angle, H)
n = length(H);
F = zeros(n, 1);
for i = 1 : n
    F(i) = calcV(H(i, 1), angle(1), angle(2)) - calcV(H(i, 2), angle(1), angle(2));
end
end

```